量子群へのホップガロア・アプローチ

著者	増岡 彰
発行年	2011
その他のタイトル	Hopf-Galois theoretic approach to quantum groups
URL	http://hdl.handle.net/2241/115121

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月１０日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００３６
研究課題名（和文）量子群へのホップガロア・アプローチ

研究課題名（英文）Hopf-Galois theoretic approach to quantum groups

研究代表者
増岡　彰（MASUOKA AKIRA）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：５０２２９３６６

研究成果の概要（和文）：ホップガロア拡大とは、代数幾何学における主等質空間(または torsor)、位相幾何学における主ファイバー束の非可換類似である。ホップガロア拡大の理論、即ちホップガロア理論におけるアイデアやテクニックは、作用を伴う非可換またはスーパー可換代数、デサント理論に大変有効である。これらを用い、量子群、スーパー代数群、ピカール・ヴェシオ理論の研究を行った。得られた研究成果のうちに、量子包絡環を含む一連のホップ代数のコサイクル変形による構成、これを応用した一般化された q-ボゾン代数、一般化された量子ダブルの研究がある。

研究成果の概要（英文）：Hopf-Galois extensions of non-commutative algebras are a non-commutative analogue of principal homogeneous spaces (or torsors) in algebraic geometry, and of principal fiber bundles in algebraic topology. Ideas and techniques developed in Hopf- Galois theory can be effectively applied to study non-commutative or super- commutative algebras, and descent theory as well. The investigator did apply these to study quantum groups, algebraic super-groups and Picard-Vessiot theory. The obtained results include the construction of a series of Hopf algebras including the quantized enveloping algebras, by using cocycle deformation, together with its applications to study of generalized q-boson algebras and generalized quantum doubles.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：ホップ代数、量子群、スーパー群スキーム、ピカール・ヴェシオ理論

１．研究開始当初の背景
量子群 U_q が、1980 年代半ば Drinfeld と神保により独立に発見されて以来、さまざまな応用が見いだされ、実り豊かな研究成果がもたらされた。しかし、生成系と関係式による U_q の定義は複雑なため、より概念的で判りやすい構成法が求められた。

２．研究の目的
ホップガロア理論を応用し、U_q のコサイクル変形による構成法を与える。これは即ち、U_q を、より判りやすい次数付きホップ代数のコサイクル変形として捉え、そこからさまざまな情報を引き出そうとするものである。

３．研究の方法
ホップ代数学（とくにホップガロア理論）における、コサイクル変形、デサントといった方法や、組紐代数、ボゾン化のアイデアを用いた。デサントを除くと、これらは量子群の研究において現れたか、またその研究を契機に明確に意識されるようになったものである。
　特に、コサイクル変形について説明を加える。ホップ代数Hに対し、双１次形式 s：H x H → k でたたみ込み積に関し可逆でコサイクル条件を満たすものとする。このような s に対し、Hを余代数と見て、Hの上に新しい積をもともとの積の s 共役として定義したものＬを、Hの s によるコサイクル変形と呼ぶ。これ Drinfeld による構成の双対化である。Ｌもまたホップ代数になり、H とＬの余加群圏はテンソル圏として同型になることが知られている。

４．研究成果
ホップガロア理論の応用を、当初意図した量子群に加え、スーパー代数群、ピカール・ヴェシオ理論等にも見い出せた。

(1)**量子群に関して**：まず次の定理を得た。

定理([下記雑誌論文リスト中 ⑥ ⑤])．量子群 U_q を含む一連の点状ホップ代数（更にその一般化）は（より判りやすい）それらの次数化のコサイクル変形である。

　このコサイクル変形の方法で次の成果を得た。
・量子ダブルの判りやすい構成法を与えた([論文⑤])。
q-ボゾン（または柏原）代数とその上の加群をより一般的状況で研究した([論文④])。
・極小準三角点状ホップ代数の記述を与えた([論文②])。
・Whitehead Lemma の量子版を証明した([論文⑥])。

　このうち最後の結果は次のとおり。

定理．q が１のベキ根でない場合、有限型のカルタン行列に付随する量子群U_q に対し、勝手な有限次元 U_q-加群 M を係数域にもつ第２コホモロジー H^2(U_q, M) は消滅する。

　以上の研究成果を、学会発表リスト中の ④ にて発表した。
　ホップガロア理論の別の応用として、いわゆる永田の定理「正標数の体上、線型簡約連結群スキームはアーベルである」の量子版を有限量子群について証明した。即ち次を得た。

定理([論文④])．正標数ｐ の体上、代数として局所的な有限次元余半単純ホップ代数は必ず余可換であり、基礎体が代数閉体であれば p 群の群環に同型になる。

(2)**スーパー代数群に関して**：おおざっぱに言って、ベクトル空間の上の通常のシンメトリーを一般化した、スーパー・シンメトリーに基づく代数群をスーパー代数群と呼ぶ。これを最も一般的な函手的見地から研究した。その見地では、スーパー可換代数の圏上定義された群函手をスーパー群と呼び、条件を加えたものを条件が次第にきつくなる順に、スーパー群層、スーパー群スキーム、スーパー・アフィン群、スーパー代数群と呼ぶ。Alexander Zubkov と共同研究の成果を、プレプリント(投稿中)

A. Masuoka, A. N. Zubkov, Quotient sheaves of algebraic supergroups are superschemes, arXiv: math. 1007.2236

と学会発表 ③ にて発表した。主定理は次のとおり。

定理．スーパー代数群 G の閉部分スーパー群 H による商層 G/H が必ずネータ的スーパースキームである。

　これはスーパー幾何学における基本問題に答えるもので、これまで例えばコホモロジーを定義するとき置かれていた仮定が、実は不要であることが明らかになった。

(3) **ピカール・ヴェシオ理論に関して**：微分または差分方程式のガロア理論は、ピカール・ヴェシオ理論と呼ばれる。先に竹内光弘はホップ代数を用いて、微分方程式のピカール・ヴェシオ理論をより洗練した形に再構成し、ついで研究代表者は天野勝利と共同で、この竹内の理論を差分方程式の理論も統一的に含む形に一般化した。こうして得られた一連の結果を、この２人と共同で、より受け入れやられやすい形にして解説した（下記図書リスト中 ①）。

また当該分野の２つの新しい話題、反復q−差分代数とパラメタ付き微分方程式のピカール・ヴェシオ理論、に関しての考察を２編のプレプリント

A. Masuoka, The x_R-bialgebra associated with an iterative q-difference algebra,
A. Masuoka, D-Picard-Vessiot extensions of artinian simple Ď-module algebras”

にまとめた。

これらの研究成果を学会発表 ② ① にて行った。特に ② において、名古屋大学名誉教授・梅村浩先生とお近づきになることができ、いろいろ教えていただいたことはとても有益であった。

(4) **非可換 torsor について**：前述のとおり、非可換 torsor とは、ホップガロア拡大に他ならないが、torsor の理論の非可換アナログであることを強調するためにこの名称を用いる。

J.-P. Serre らは代数群Ｇに対し versal torsor なる概念を定義した。おおざっぱに言うとそれは、すべての G-torsors、則ち G の twisted form であるような G-varieties、のパラメトリゼーションをあたえる variety を指す。

E. Aljadeff と C. Kassel はこの versal torsor の非可換アナログを考案した。則ち、基礎体 k 上、Hをホップ代数、Aを正規底を持つ H-ガロア拡大とするとき、次の性質を満たす可換代数 B=B(H,A) を構成した。ｋの各拡大体Kに対し、Spec B の各K有理点が、Aの twisted K-form (正規底を持つH-ガロア拡大としての) を与える。この Spec B を非可換 versal torsor と呼ぶには、この逆の性質、則ち、「Aの twisted K-form が必ず Spec B のK有理点により与えられる」を持つ必要がある。

研究代表者は C. Kassel との共同研究(論文[①])で次の成果を得た。

・H、Aに応じ、Hの適当なコサイクル変形 L を選べば B(H,A) = B(L,L) とできる。

・従って H=A の場合考察すれば十分であるが、この場合、H が(i)有限次元、(ii)可換、(iii)余可換、(iv)点状かつ各群様元の位数有限、のいずれかの条件を満たせば、Spec B は非可換 versal torsor として期待される上の性質を持つ。

一方、代数群 G に対し、G-torsor を用いて G-variety を変形し新しい G-torsor を構成する(例えば Severi-Brauer varieity の構成)方法は古くから知られているが、これの非可換アナログを考えることができる。P. Guillot, C. Kassel との共同研究で、非可換 torsor を用いた、ホップ代数上の comodule 代数の変形を、生成元と基本関係式で具体的に与え、いくつかの重要な例を構成し、その具体例の持つ性質を研究した。この成果は次の論文にまとめた。

P. Guillot, C. Kassel, A. Masuoka, Twisting algebras using non-commutative tosors—Explicit computations, Math. Zeit., 査読有り（掲載予定）

(5) **ホップ代数に関して**：半単純ホップ代数の分類に関して、自らの研究成果を交えて解説した(図書②)。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計６件)

①C. Kassel & A. Masuoka, Flatness and freeness properties of the generic Hopf Galois extensions, Rev. Un. Mat. Argentina 51(2010), 79－94.　査読有り

②A.Masuoka, On minimal quasitriangular pointed Hopf algebras, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 16(2010), 545－576.　査読有り

③A.Masuoka, Generalized q-boson algebras and their integrable modules, J. Algebra 322(2009), 2199－2219.　査読有り

④A.Masuoka, Semisimplicity criteria for irreducible Hopf algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 137(2009), 1925－1932.　査読有り

⑤A.Masuoka, Construction of quantized enveloping algebras by cocycle deformation, Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues 33 (2008), 387－406.　査読有り

⑥A.Masuoka, Abelian and non-abelian second cohomologies for quantized enveloping algebras, J. Algebra 320(2008), 1－47.　査読有り

〔学会発表〕（計４件）
①A. Masuoka, “Hopf algebraic approach to Picard-Vessiot theory”, AMS-MAA 合同数学会議, ニューオリオンズ（米国）, 2011 年 1 月 8 日.

②A. Masuoka, “Hopf algebraic approach to Picard-Vessiot theory”, Galois Theory and Explicit Methods, スペイン・バルセロナ大学, 2010 年 9 月 7 日.

③A. Masuoka, “On affine super groups”, Non-commutative Algebras and Quantum Groups, Conference in Honor of Prof. Mia Cohen, イスラエル・Ben Gurion 大学, 2010 年 5 月 25 日.

④A. Masuoka, “Hopf-Galois approach to quantum groups”, Conference in Honor of Prof. Hans-Juergen Schneider, アルゼンチン国立コルドバ大学, 2009 年 9 月 5 日.

〔図書〕（計 2 件）
①K. Amano, A. Masuoka & M. Takeuchi, Classification of semisimple Hopf algebras, in: M. Hazewinkel ed. Handbook of Algebra Vol.6, Elsevier, 2009, pp. 125--172 (分担執筆)

②A. Masuoka, Classification of semisimple Hopf algebras, in: M. Hazewinkel ed. Handbook of Algebra Vol.5, Elsevier, 2008, pp. 429－455 (分担執筆)

６．研究組織
(1)研究代表者
増岡　彰（MASUOKA AKIRA）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：５０２２９３６６